

Аннотация: урок является обобщающим по теме методы решения уравнений в 11 классе. Учащиеся работают в группах, группам за ранее дано задание рассказать о предложенном методе решения уравнений, представить излагаемые материал в виде схемы, буклета или ином виде. Упражнения, предлагаемые обучающимся для решения в группах, составлены по степени сложности, каждый ученик может определить для себя уровень сложности выбираемого примера, может решать примеры самостоятельно.

Цели: 1. Совершенствование навыков решения уравнений разными методами.

2. Развитие умений анализировать, классифицировать уравнения по методам решения, делать выводы, обрабатывать и представлять информацию в различных формах.

3. Совершенствование коммуникативной и общекультурной компетенции через работу в группах и выполнение различных социальных ролей.

Ход урока:

1. Организационный момент (10-12 минут).

Учитель: В ходе изучения курса математики в 5-11 классах мы с вами решали различные уравнения: линейные, квадратные, высших степеней, тригонометрические, показательные, логарифмические. Говорили о том, что есть общие методы решения уравнений. Какие методы решения уравнений вы знаете?

Ученики: Известны методы решения – аналитические, функционально-графический.

Учитель: Сегодня мы будем говорить об аналитических методах решения. Суть каждого метода расскажут представители групп учащихся.

Выступления представителей каждой группы, ребята рассказывают суть метода решения, его применение, представляют памятки, которые они приготовили, раздают свои памятки учащимся других групп.

1 группа представляет метод замены уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x)=g(x)$ (приложение 1).

2 группа представляет метод разложения на множители (приложение №2, буклет).

3 группа представляет метод введения новой переменной (приложение №3).

2. Работа в группах (18-20 минут).

Учитель: Мы вспомнили суть каждого метода, у всех есть памятки, поэтому вы можете смело выступить в роли экспертов по определению метода решения предложенных вам уравнений. (Каждому ученику предложены уравнения, необходимо определить метод решения уравнения, не решая его.)

№1. Определите метод решения уравнения:

1. $x^3 + 2x^2 + 3 + 6x = 0$;

2. $2^{x^2+3} - 8^{x+1} = 0$;

3. $\sin x \cos x + \sin^2 x = 0$;

4. $\sqrt{x^2 + x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 19}$;

5. $(x^2 - 6x)^5 = (2x - 7)^5$;

6. $2\cos^2 x + 3\sin x + 1 = 0$;

7. $\sqrt{3} \cos x = \sin 6x$;

8. $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x-2)(x-3) = 1$;

9. $\lg(9^x + 3^{x+1} - 1) - \lg(3^x - 2 \cdot 9^x) = 0$.

Учащиеся проговаривают метод решения каждого уравнения.

Учитель: Приступаем к выполнению второго задания. Каждая группа решает уравнения методом, который они представляли, задания подобраны по уровню сложности различные, у каждого ученика есть возможность определить для себя уровень сложности предложенных заданий, получить консультацию соседа, проверить ответы по предложенным листам ответов для каждой из групп.

Задания для 1 группы

№1. Решите уравнение:

а) $(x^2 - 6x)^9 = (2x - 7)^9$;

б) $\log_{0,1} \sqrt{5x - 6} = \log_{0,1} \sqrt{x^2 - 2}$.

№2. Найдите наименьший корень уравнения

$(2^{x-3} - 16) \cdot \sqrt{4 - x} = 0$.

№3. Найдите корень уравнения $\ln \frac{12}{x+2} = \ln(x+6)$ или сумму его корней, если их несколько.

№4. Укажите наименьший корень уравнения

$2 \log_5 (\cos x) = \log_{0,2} 4$, принадлежащий промежутку $[90^\circ; 360^\circ]$.

№5. Решите уравнение $f(x) = f\left(\frac{2x}{3} + 1\right)$, если

$f(x) = \log_3(3x)$. Если корней больше одного, то в ответе запишите их среднее арифметическое.

Задания для 2 группы

№1. Решите уравнение:

а) $\sqrt[4]{x^9} - 2\sqrt[4]{x^5} - 15\sqrt[4]{x} = 0$;

б) $\sin^2 x = 3 \sin x \cos x$.

№2. Найдите сумму корней уравнения

$(x^2 - x - 12) \cdot \log_{0,2}(2 - x) = 0$.

№3. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos 5x + \cos 7x - \cos 6x = 0$.

№4. Найдите произведение корней уравнения

$2\sqrt{x} \cdot 7^{-x} - 7^{1-x} = \frac{1}{49} (2\sqrt{x} - 7)$.

№5. Найдите все значения x , удовлетворяющие равенству $\cos x = |\cos x| \cdot (x + 3)^2$.

Задания для 3 группы

№1. Решите уравнение:

а) $x^8 + 3x^4 - 4 = 0$;

б) $2 \cdot 7^{3x} - 5 \cdot 49^{3x} + 3 = 0$.

№2. Найдите наибольший корень уравнения

$2 \log_9^2 x = 2 - 3 \log_9 x$.

№3. Найдите количество различных значений аргумента $x \in [30^\circ; 270^\circ]$, при которых $f(x) = 0$, если $f(x) = 2 \sin^2 x + \sin x - 1$.

№4. Найдите корень уравнения $3^{2 \log_3^2 x} - 82 \cdot 3^{\log_3^2 x} + 81 = 0$ или произведение корней, если их несколько.

№5. Пусть x_0 – наименьший положительный корень уравнения $9 \cos^2 x + 7 \cos x \sin x - 1 = 0$. Найдите $\operatorname{tg} x_0$.

3. Решение уравнений, с комбинацией различных методов решения (10-12 минут).

Учитель: Мы повторили различные аналитические методы решения уравнений для того, чтобы успешно их применять при прохождении итоговой аттестации. Предлагаю вам решить следующие уравнения, которые предлагаются во второй части ЕГЭ. (учащиеся решают первое уравнений, один ученик выходит к доске и решает с комментариями первое уравнение).

№3. Решите уравнения:

а) $(2 \cos^2 x + 7 \cos x - 4) \sqrt{-3 \operatorname{tg} x} = 0$; б) $\frac{\log_2^2 (\cos x) + \log_2 (\cos x)}{\sin x} = 0$; в) $\frac{9^{\sin^2 x} - 3^{\sqrt{3} \sin x}}{\sqrt{-2 \cos x - 1}} = 0$.

4. Подведение итогов, домашнее задание: решить уравнения №3 (б, в).

Замена уравнения $h(f(x))=h(g(x))$ уравнением $f(x)=g(x)$

1) Показательные уравнения $a^{f(x)}=a^{g(x)} \rightarrow f(x)=g(x)$

Логарифмические уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x) \rightarrow f(x)=g(x)$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$$

2) Степенное уравнение $(f(x))^n=(g(x))^n$

n – четное
 $|f(x)|=|g(x)|$

n – нечетное
 $f(x)=g(x)$

3) Иррациональные уравнения:

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$$

n – четное

n – нечетное

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x)=g(x)$$

4) **Запрещено** для тригонометрических уравнений:

$$\begin{aligned} \sin(f(x)) &= \sin(g(x)) \\ f(x) &\neq g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(f(x)) &= \cos(g(x)) \\ f(x) &\neq g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(f(x)) &= \operatorname{tg}(g(x)) \\ f(x) &\neq g(x) \end{aligned}$$



Составители.

*Желают удачи
в решении уравнений!*

Адрес: 11 класс
«МАОУ Городская гимназия №1»,
г. Усть-Илимск,
ул. Наймушина 9, а/я 47



МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Метод разложения на множители

МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ

Этот метод заключается в том, что уравнение

$$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = 0$$

можно заменить совокупностью уравнений

$$f(x)=0; g(x)=0; h(x)=0$$

После нахождения корней нужно выбрать те решения, которые принадлежат области определения исходного уравнения, а остальные корни отбросить.

Применяется при решении:

• **неполных квадратных уравнений:**

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \\ x \cdot (ax + b) &= 0 \\ ax^2 + c &= 0 \end{aligned}$$

• **уравнений вида**

$$h(x) \cdot f(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Алгоритм решения:

1) найти ОДЗ;

2) заменить равносильным уравнением;

$$f(x) \cdot [h(x) - g(x)] = 0$$

3) заменить равносильным уравнением:

$$f(x)=0 \text{ и } h(x)-g(x)=0$$

4) выбрать корни с учётом ОДЗ.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 корни квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Памятка по решению уравнений методомвведения новой переменной

Суть метода: Если уравнение $f(x)=0$ преобразовано к виду $p(g(x)) = 0$, то надо ввести новую переменную $u=g(x)$, решить уравнение $p(u)=0$, затем решить совокупность уравнений: $g(x)=u_1$; $g(x)=u_2$; ... ; $g(x)=u_n$, где u_1 , u_2 , u_n – корни уравнения $p(u)=0$.

Советы:

1. Не торопитесь начинать преобразования, подумайте, нельзя ли записать уравнение проще, введя новую переменную.
2. Если ввели новую переменную, то решайте полученное уравнение до конца (до проверки корней) и только потом возвращайтесь к исходной переменной.

Применяется при решении:

- Биквадратных уравнений
 $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($x^2 = t, t \geq 0$)
- Однородных уравнений
 $af^2(x) + bg(x)f(x) + cg^2(x) = 0$ ($\div g^2(x); t = \frac{f(x)}{g(x)}$)
 $a\sin^2x + b\sin x \cos x + c\cos^2x = 0$ ($\div \cos^2x; t = \operatorname{tg}x$)
 $3^x \cdot 7^{x+2} = 49 \cdot 4^x$ ($\div 4^x$)
- Возвратных уравнений
 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ ($\div x^4$)
 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + ka = 0$ ($\div x^4$)
- Показательных, логарифмических, тригонометрических уравнений.

Раздаточный материал к уроку

№1. Определите метод решения уравнения:

1. $x^3 + 2x^2 + 3 + 6x = 0$;
2. $2^{x^2+3} - 8^{x+1} = 0$;
3. $\sin x \cos x + \sin^2 x = 0$;
4. $\sqrt{x^2 + x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 19}$;
5. $(x^2 - 6x)^5 = (2x - 7)^5$;
6. $2\cos^2 x + 3\sin x + 1 = 0$;
7. $\sqrt{3} \cos x = \sin 6x$;
8. $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x-2)(x-3) = 1$;
9. $\lg(9^x + 3^{x+1} - 1) - \lg(3^x - 2 \cdot 9^x) = 0$.

Задания для 1 группы

№1. Решите уравнение:

- а) $(x^2 - 6x)^9 = (2x - 7)^9$;
- б) $\log_{0,1} \sqrt{5x - 6} = \log_{0,1} \sqrt{x^2 - 2}$.

№2. Найдите наименьший корень уравнения

$$(2^{x-3} - 16) \cdot \sqrt{4 - x} = 0.$$

№3. Найдите корень уравнения $\ln \frac{12}{x+2} = \ln(x+6)$ или сумму его корней, если их несколько.

№4. Укажите наименьший корень уравнения

$$2 \log_5 (\cos x) = \log_{0,2} 4, \quad \text{принадлежащий промежутку } [90^\circ; 360^\circ].$$

№5. Решите уравнение $f(x) = f\left(\frac{2x}{3} + 1\right)$, если

$f(x) = \log_3(3x)$. Если корней больше одного, то в ответе запишите их среднее арифметическое.

№1. Определите метод решения уравнения:

1. $x^3 + 2x^2 + 3 + 6x = 0$;
2. $2^{x^2+3} - 8^{x+1} = 0$;
3. $\sin x \cos x + \sin^2 x = 0$;
4. $\sqrt{x^2 + x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 19}$;
5. $(x^2 - 6x)^5 = (2x - 7)^5$;
6. $2\cos^2 x + 3\sin x + 1 = 0$;
7. $\sqrt{3} \cos x = \sin 6x$;
8. $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x-2)(x-3) = 1$;
9. $\lg(9^x + 3^{x+1} - 1) - \lg(3^x - 2 \cdot 9^x) = 0$.

Задания для 2 группы

№1. Решите уравнение:

- а) $\sqrt[4]{x^9} - 2\sqrt[4]{x^5} - 15\sqrt[4]{x} = 0$;
- б) $\sin^2 x = 3 \sin x \cos x$.

№2. Найдите сумму корней уравнения

$$(x^2 - x - 12) \cdot \log_{0,2}(2 - x) = 0.$$

№3. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos 5x + \cos 7x - \cos 6x = 0$.

№4. Найдите произведение корней уравнения

$$2\sqrt{x} \cdot 7^{-x} - 7^{1-x} = \frac{1}{49} (2\sqrt{x} - 7).$$

№5. Найдите все значения x , удовлетворяющие равенству $\cos x = |\cos x| \cdot (x + 3)^2$.

№1. Определите метод решения уравнения:

1. $x^3 + 2x^2 + 3 + 6x = 0$;
2. $2^{x^2+3} - 8^{x+1} = 0$;
3. $\sin x \cos x + \sin^2 x = 0$;
4. $\sqrt{x^2 + x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 19}$;
5. $(x^2 - 6x)^5 = (2x - 7)^5$;
6. $2\cos^2 x + 3\sin x + 1 = 0$;
7. $\sqrt{3} \cos x = \sin 6x$;
8. $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x-2)(x-3) = 1$;
9. $\lg(9^x + 3^{x+1} - 1) - \lg(3^x - 2 \cdot 9^x) = 0$.

Задания для 3 группы

№1. Решите уравнение:

- а) $x^8 + 3x^4 - 4 = 0$;
- б) $2 \cdot 7^{3x} - 5 \cdot 49^{3x} + 3 = 0$.

№2. Найдите наибольший корень уравнения

$$2 \log_9^2 x = 2 - 3 \log_9 x.$$

№3. Найдите количество различных значений аргумента $x \in [30^\circ; 270^\circ]$, при которых $f(x) = 0$, если $f(x) = 2\sin^2 x + \sin x - 1$.

№4. Найдите корень уравнения $3^{2\log_2^2 x} - 82 \cdot 3^{\log_2^2 x} + 81 = 0$ или произведение корней, если их несколько.

№5. Пусть x_0 – наименьший положительный корень уравнения $9\cos^2 x + 7 \cos x \sin x - 1 = 0$. Найдите $\operatorname{tg} x_0$.

№3. Решите уравнения:

а) $(2\cos^2 x + 7 \cos x - 4)\sqrt{-3\operatorname{tg} x} = 0;$

б) $\frac{\log_2^2(\cos x) + \log_2(\cos x)}{\sin x} = 0;$

в) $\frac{9^{\sin^2 x} - 3^{\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{-2\cos x} - 1} = 0$

№3. Решите уравнения:

а) $(2\cos^2 x + 7 \cos x - 4)\sqrt{-3\operatorname{tg} x} = 0;$

б) $\frac{\log_2^2(\cos x) + \log_2(\cos x)}{\sin x} = 0;$

в) $\frac{9^{\sin^2 x} - 3^{\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{-2\cos x} - 1} = 0$

№3. Решите уравнения:

а) $(2\cos^2 x + 7 \cos x - 4)\sqrt{-3\operatorname{tg} x} = 0;$

б) $\frac{\log_2^2(\cos x) + \log_2(\cos x)}{\sin x} = 0;$

в) $\frac{9^{\sin^2 x} - 3^{\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{-2\cos x} - 1} = 0$

Ответы

	№1		№2	№3	№4	№5
	а	б				
1 группа	- 8; 1	4	4	0	300^0	3
2 группа	0; 5	$\pi n, n \in Z$ $\arctg 3 + \pi k,$ $k \in Z$	- 2	$\frac{\pi}{12}$	$24\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in Z$
3 группа	± 1	0	3	2	1	1